Казанский государственный университет

На правах рукописи

Деревенский Владислав Павлович

МАТРИЧНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В БАЗИСЕ АЛГЕБР ЛИ

01.01.0.2 — дифференциальные уравнения

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Казань-2001

Работа выполнена на кафедре высшей математики Казанской государственной архитектурно-строительной академии.

Официальные оппоненты:

Малышев Ю.В. - д.ф.-м.н., профессор (КГТУ, Казань)

Павловский Ю.Н. - член-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор (ВЦ РАН, Москва)

Трофимов В.В. - д.ф.-м.н., профессор (МГУ, Москва)

Ведущая организация: Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского.

Защита состоится **21 февраля в 15 часов** на заседании диссертационного совета ДР 053.29.47 при Казанском государственном университете по адресу: **420008, г.Казань, ул.Кремлевская, 18**.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Казанского государственного университета.

Автореферат разослан "19" января 2001 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н., профессор Н.Б.Плещинский

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Матричные обыкновенные дифференциальные уравнения (МОДУ), описывающие многие реальные процессы, играют важную роль в современной научной теории и практике. Исследование таких уравнений сопряжено с большими трудностями, обусловленными некоммутативностью матричной алгебры. Поэтому при рассмотрении МОДУ целесообразно использовать аппарат теории алгебр Ли, связывающей мультипликативные и пространственные свойства матричного многообразия. Так что, параметры таких уравнений желательно задавать в базисе(E_i) $\left(i = \overline{1, N} < \infty\right)$ матричного представления N-мерной алгебры Ли L_N. Особое значение при этом имеет установление зависимости основных свойств МОДУ и их решений от структурных констант L_N, определяющих ее алгебраическое строение. Это позволяет решать ряд принципиальных задач теории матричных ОДУ. К их числу относятся:

1) классификация МОДУ по типам структур L_N;

2) нахождение их решений, ковариантных относительно замены представления алгебры;

3) выбор пространства представления L_N, наиболее удобного для решения и исследования МОДУ;

4) определение видов преобразований, относительно которых инвариантны и ковариантны данные уравнения, и т.д..

Актуальность диссертационной темы подтверждается и усиливается возможностью обобщения методов и результатов работы на случай ОДУ над произвольными ассоциативными алгебрами. Эта возможность обеспечивается теоремой И.Д. Адо о представлении алгебр Ли матрицами, которая позволяет переходить от линейно-операторных эволюционных уравнений к матричным.

Цель и задачи работы. Общей целью диссертации является разработка методов исследования действительных матричных обыкновенных дифференциальных уравнений, заданных в базисе конечномерных алгебр Ли. При этом главной проблемой является установление связи важнейших свойств определенных видов МОДУ и их решений со структурой L_N, вообще, и структурными константами в частности. Более полно она определяется перечнем решаемых конкретных задач, наиболее важными из которых являются следующие:

1) задача о разрешимости в квадратурах а) линейных МОДУ первого и K-го порядков (МЛОДУ.К) с односторонним и двусторонним умножением, б) систем МЛОДУ.1, в) квазилинейных и дифференциально-автоморфных уравнений;

2) проблемы представимости в экпоненциальном и мультипликативно-экспоненциальном видах решений линейных и квазилинейных МОДУ.1;

3) вопрос о свойствах линейных однородных диффеоморфных преобразований множеств решений МЛОДУ.1 с односторонним и двусторонним умножением;

4) задача о сводимости МЛОДУ.1 и их систем к аналогичным уравнениям и системам с постоянными коэффициентами;

5) вопросы применения методов и результатов исследования матричных ОДУ в теории скалярных уравнений.

Методика исследования этих задач, кроме методов теории матриц, алгебр Ли и тензорного исчисления, содержит предложенные автором а) аппарат решения систем матричных односторонних линейных алгебраических уравнений и б) способ редуцирования тензорной валентности матричных уравнений с двусторонним умножением.

Научную новизну полученных результатов определяют как постановки задач, так и методы их решения. Новыми являются все утверждения работы в которых впервые:

1) в терминах теории алгебр Ли даны критерии разрешимости в квадратурах односторонних и двусторонних МЛОДУ.К и систем МЛОДУ.1;

2) в символах структурных констант L_N установлены условия представимости в экспоненциальной и мультипликативно-экспоненциальной формах решений МЛОДУ.1;

3) определены формулы для решения систем матричных односторонних алгебраических линейных уравнений;

4) предложен метод редуцирования тензорной валентности матричных уравнений;

5) исследованы квазилинейные и дифференциально-автоморфные МОДУ.1;

6) найдены условия приводимости систем односторонних и двусторонних МЛОДУ.1 и полиприводимости МЛОДУ.К;

7) использован метод лиевоалгебраического анализа некоторых видов скалярных уравнений и систем.

Практическая значимость работы заключается в возможности применения ее методов и результатов в различных научных областях. Матричные дифференциальные уравнения являются основой гамильтонова формализма классической, релятивистской и квантовой механик, описывающих многие физические процессы. На МОДУ зиждется "Теория оптимального управления", имеющая огромное значение в технике, технологии, экономике, социологии и т.д.. Развиваемая в диссертации теория позволит этим и ряду других научных направлений использовать для описания эволюционных явлений матричные и операторные уравнения высших порядков, а для характеристики взаимодействующих процессов-системы таких уравнений. Еще более широкий диапазон практического использования диссертационного материала обеспечивается возможностью применения его к решению и исследованию скалярных ДУ и их систем, которые интенсивно "работают" в большинстве естественных наук, изучающих динамические свойства реальных явлений (газо-, гидро-, термодинамика и т.п.).

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на конференциях, семинарах и коллоквиумах как в нашей стране, так и за рубежом. В частности, на

— 4-й конференции по дифференциальным уравнениям и их приложениям (Русе, Болгария, 1989),

— коллоквиуме по дифференциальным уравнениям и приложениям (Будапешт, Венгрия, 1991),

— 5-й международной конференции по комплексному анализу (Варна, Болгария, 1991),

— 4-м коллоквиуме по качественной теории дифференциальных уравнений (Сегед, Венгрия, 1993),

— XI-м Российском коллоквиуме "Современный групповой анализ и задачи математического моделирования" (Самара, 1993),

— 1-4 международных конференциях по дифференциальным уравнениям и их приложениям (Саранск, 1994, 1996, 1998, 2000),

— международной конференции "Алгебраические и аналитические методы в теории дифференциальных уравнений" (Орел, 1996),

— 1-й международной конференции "Дифференциальные уравнения и применения" (С.-Петербург, 1996),

— Воронежской математической школе (1997, 2000),

— 7-й и 10-й межвузовской конференции "Математическое моделирование и краевые задачи" (Самара, 1997, 2000),

— VII четаевской конференции "Аналитическая механика, устойчивость и управление движением" (Казань, 1997),

— конференции "Алгебра и анализ" (Казань, 1997),

— на научных семинарах кафедр дифференциальных уравнений университетов Ижевска, Казани, Москвы, Н.-Новгорода, Саранска и др., ВЦ РАН (Москва) и ряда других учебных и научных учреждений страны.

Публикации автора по диссертационной теме содержат более 80 наименований, из которых 48 включены в библиографический список диссертации и автореферата. Соавторов публикаций нет.

Структура и объем диссертации. Работа содержит перечень условных обозначений, "Введение", включающее краткий справочный материал по теории алгебр Ли, 4 главы, параграфы которых разбиты на пункты (п.), "Заключение" и библиографический список. Последний содержит 168 цитируемых источников и 48 публикаций автора. Общий объем диссертации — 276 страниц. В работе принята сквозная нумерация теорем (Т) по всему тексту и нумерация по главам предложений (П) и формул.

Краткое содержание работы. Во "Введении", во-первых, дается общая характеристика истории возникновения теории матричных дифференциальных уравнений, и, во-вторых, определяются актуальность, цель и новизна основных результатов работы, выносимых на защиту. Здесь же даны некоторые необходимые сведения из теории алгебр Ли.

Глава I посвящена действительным МЛОДУ с односторонним умножением на переменные параметры, которые являются квадратными непрерывными и ограниченными по евклидовой норме матрицами, заданными в базисе конечномерной алгебры Ли L_N. Глава содержит 4 параграфа. В первом из них рассматривается левостороннее однородное МЛОДУ.1, матричный параметр которого $A \in M_n^{(o)}(t) \cap L_N$ т.е. уравнение

$$\dot{X} \equiv \frac{dX}{dt} = a^i \mathrm{E}_i X: \quad |X| \equiv \det X \neq 0, a^i \in C^o(t), \ \sum_{i=1}^{N} (a^i)^2 < \infty, \ i = \overline{1,N} \leq n^2, \quad (1)$$

где $M_n^{(o)}(t)$ — множество n × n-матриц, элементами которых являются функции t класса $C^o(t)$, L_N — N-мерная алгебра Ли с базисом (E_i) и структурными константами C_{ij}^k $(j,k = \overline{1,N})$, а по повторяющимся верхним и нижним индексам производится тензорное суммирование. В п.1.1 указывается ряд свойств уравнения (1) для основных типов структур L_N. Так, на вопрос о разрешимости его отвечают следующие утверждения.

Предложение 3. Если L_N разрешима, то решение уравнения (1) находится в квадратурах.

Предложение 4. Уравнение (1) не интегрируется в квадратурах при произвольных непрерывных a^i, для простой L_3.

На основании этих утверждений и теорем о структуре L_N устанавливается мультипликативное строение решения уравнения (1). Его определяет

Теорема 1. Решение уравнения (1) имеет вид

$$X = X_1 X_2 C : \dot{X}_s = A_s X_s, s = 1,2, \dot{C} = 0,$$

где один из сомножителей X_s, находится в квадратурах для $\forall a^i \in C^0(t)$, а второй — лишь при частных значениях a^i.

В п.1.2 рассматривается вопрос о представимости решения уравнения (1) в экспоненциальной форме. Ответ на него дает

Теорема 2. Матрица

$$X = \exp(x^i E_i) : \; x^i \in C^1(t), \quad X(0) = E \tag{2}$$

является единственным решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда x^i удовлетворяют условию

$$\dot{x}^i = a^j \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (x^k C_{ki}^j)^n \right]^{-1} : \qquad x^i(0) = 0. \tag{3}$$

Альтернативу этому утверждено в п.1.3 формулирует

Теорема 3. Уравнение (1) всегда имеет единственное мультипликативно-экспоненциальное решение вида

$$X = \prod_{i=1}^{N} \mathbf{exp}(g_i E_i) \; : \quad g_i \in C^1(t), X(0) = E, \tag{4}$$

для чего необходимо и достаточно, чтобы g_i подчинялись условию

$$\dot{g}_i = a^j \left[\prod_{k=1}^{i-1} \exp(g_k C_{ki}^j) \right]^{-1} : \quad g_i(0) = 0. \tag{5}$$

Установлено, что для разрешимых L_N системы (3) и (5) интегрируются в квадратурах. В п.1.4 левосторонние МЛОДУ.1 рассматриваются в R^2, а в п.1.5 - в присоединенном матричном представлении (ПМП) L_3. Следующий пункт первого параграфа посвящен исследованию левых линейных однородных диффеоморфных преобразований множества решений уравнения (1) (X). Завершает его п.1.7, в котором рассматривается вопрос о приводимости уравнения (1) к аналогичному уравнению с постоянным матричным параметром:

Предложение 10. Для того, чтобы уравнение (1) с $A \in M_n^{(1)}(t)$, преобразованием $X = LZ : (L \in M_n^{(2)}(t),\ |L| \neq 0)$ приводилось к уравнению $\dot{Z} = RZ : |Z| \neq 0$ с постоянным матричным коэффициентом R, необходимо и достаточно, чтобы матрица L удовлетворяла левостороннему МЛОДУ.1

$$\dot{L} = (A + U)L \ : \quad U \in M_n^{(1)}(t),\ \dot{U} = [AU].$$

В необходимых случаях в § 1 утверждения для левосторонних МЛОДУ.1 сформулированы и для правосторонних уравнений.

§ 2 первой главы посвящен одностороннему МЛОДУ.1 общего вида, $X = AX + XB + C \ : \quad (A,B,C) \subset M_n^{(o)}(t) \cap L_N$. Для него, аналогично уравнению (1), указаны основные свойства (п.2.1), даны условия представимости решения в видах (2) и (4) (п.2.2 и 2.3), исследованы линейные диффеоморфные преобразования множества частных решений (п.2.4) и приводимость к уравнению с постоянными матричными коэффициентами. Большинство результатов §2 следует из связи (П13) решений этого и односторонних МЛОДУ.1

$$X = X_o \int X_o^{-1} C Y_o^{-1} dt Y_o : \ \dot{X}_o = AX_o, \ \ \dot{Y}_o = Y_o B, \ \ |X_o Y_o| \neq 0,$$

в силу чего они имеют, в основном, теоретическое значение.

В §3 излагается метод решения систем односторонних матричных линейных ОДУ.1, для формулирования которого дается (п.3.1)

Определение 1. Левым оператором Гаусса, заданным на последовательности квадратных невырожденных матриц A_k $(k=\overline{1,K})$, называется оператор $\Gamma(A_k)$, действующий на последовательность квадратных матриц Y_l $(l=\overline{1,K})$, по закону

$$\Gamma(A_k)Y_l \equiv Y_l - A_l A_k^{-1} Y_k$$

и "умножающийся" по правилу

$$\Gamma(B_i)\Gamma(A_k)Y_l \equiv \Gamma(\Gamma(A_k)B_i)(\Gamma(A_k)Y_l)\ :\quad |\Gamma(A_k)B_i| \neq 0.$$

Образующие мультипликативную неабелеву квазигруппу (П19), эти операторы в п. 3.2 используются для реализации "обобщенного алгоритма Гаусса" решения систем матричных левосторонних алгебраических линейных уравнений

$$U_i^j X_j = V_i\ :\ (U_i^j, x_j, V_i) \subset M_n,\ ij,=\overline{1,K}. \tag{6}$$

Его формулирует

Предложение 21. Если в системе (6) при некоторой перенумерации уравнений и искомых матриц

$$\delta(U) \equiv \mathbf{det}\,\Delta(U) \neq 0:\ \ \Delta U = U_1^1 \prod_{i=2}^{K-1}\left(\prod_{k=1}^{i-1}\Gamma(U_k^k), U_i^j\right),\ \ U \equiv (U_i^j),$$

то ее решением являются матрицы

$$X_i \equiv W_i(U,V)\ :\ V = (V_i),$$

$$W_i(U,V) = \left[\prod_{k=1}^{i-1}\Gamma(U_k^k)U_i^i\right]^{-1} \prod_{\alpha=K}^{i+1} \Gamma\left(\prod_{k=1}^{\alpha-1}\Gamma(U_k^k)U_\alpha^\alpha\right)\left(\prod_{k=1}^{i-1}\Gamma(U_k^k)V_i\right).$$

Для изложения дальнейшего материала необходимо

Определение 1*. Правым оператором Гаусса, заданным на последовательности квадратных невырожденных матриц A_k, называется оператор $\Gamma(A_k)$, действующий на последовательность квадратных матриц Y_l по закону

$$Y_l \Gamma(A_k) \equiv Y_l - Y_k (A_k)^{-1} A_l$$

и "перемножающийся" по правилу

$$Y_l \Gamma(A_k) \Gamma(B_i) \equiv (Y_l \Gamma(A_k)) \Gamma(B_i \Gamma(A_k)) \quad : \quad |B_i \Gamma(A_k)| \neq 0.$$

В символах этих операторов формулы для решения правосторонней алгебраической линейной системы дает

Предложение 21*. Если в системе

$$X_j U_i^j = V_i : \ (U_i^j, X_j, V_i) \in M_n, \quad i,j = \overline{1,K}$$

при некоторой перенумерации индексов

$$\delta^*(U) \equiv \mathbf{det}\, \Delta^*(U) \neq 0 \ : \quad \Delta^*(U) \equiv U_1^1 \prod_{i=2}^{K-1} (U_i^i \prod_{k=1}^{i-1} \Gamma(U_k^k)),$$

то ее решением будет

$$X_i = W_i^*(U,V) \equiv (V_i \prod_{k=i-1}^{1} \Gamma\, (U_k^k)) \prod_{\alpha=i+1}^{K} \Gamma\, (U_\alpha^\alpha \prod_{k=i-1}^{1} \Gamma\, (U_k^k)) \left[U_i^i \prod_{k=i-1}^{1} \Gamma\, (U_k^k) \right]^{-1}.$$

С помощью П21 в п.3.3 формулируются следующие условия интегрируемости систем матричных односторонних ЛОДУ.1

Теорема 4. Если в системе

$$\dot{X}_i = A_i^j X_j + B_i \ : \quad (A_i^j, B_i) \subset M_n^{(o)}(t), i,j = \overline{1,K},$$

перенумерацией индексов, матрицы A_i^j можно представить в виде

$$A_i^j = W_i(T, P^j) \ : \quad T = (T_i^j), \ \ \dot{T}_i^j = 0, \quad \delta(T) \neq 0,$$

где $P^j = (F_i^m T_m^j)$, $m = \overline{1,K}$,

$$F_i^j = \begin{cases} 0 : (i > j) \vee (i < j) \\ f_i^p E_{ip} : i = j, [E_{ip} E_{iq}] = C_{pq}^r(i) E_{ir}, E_{ip} \in L_{N(i)}, f_i^p \in C^1(t), p, q, r = \overline{1, N(i)} \\ F_i^j : (i < j) \vee (i > j), \end{cases}$$

а $L_{N(i)}$ — разрешимые алгебры Ли, то она интегрируется в квадратурах.

Это утверждение в п. 3.4 конкретизируется на случай двумерной системы. В п. 3.5 исследуются линейные диффеоморфизмы (П24) и проводимость (П25) однородных систем левосторонних МЛОДУ.1. Заключает параграф п.3.6, где полученные результаты обобщаются на односторонние системы общего вида,

$$\dot{X}_i^j = A_i^k X_k^j + X_i^k B_k^j + C_i^j : (A_i^j, B_i^j, C_i^j) \subset M_n^{(0)}(t), \quad i, j, k = \overline{1, K}.$$

§4 посвящен матричным линейным уравнениям высших порядков. Он содержит 6 пунктов. В первых трех рассматриваются левосторонние уравнения второго и третьего порядков, для которых указывается ряд свойств и достаточные условия разрешимости в квадратурах (П 27-32). В п.4.4 такие условия даются для МЛОДУ.М:

Теорема 5. Если в уравнении

$$\sum_{k=M}^{0} P_{M,k} \frac{d^k X}{dt^k} = F : P_{M,M} = E, \quad (P_{M,k}, F) \subset M_n^{(0)}(t) \qquad (7)$$

матричные коэффициенты определяются индуктивно в виде

$$\begin{aligned} &P_{m,m-1} = A_m + P_{m-1,m-2}, \quad P_{m,m} = E, \quad m = \overline{1, M} \\ &P_{m,j} = \dot{P}_{m-1,j} + A_m P_{m-1,j} + P_{m-1,j-1}, \quad j = \overline{1, m-2}, \\ &P_{m,0} = \dot{P}_{m-1,0} + A_m P_{m-1,0}, \quad P_{1,0} = A_1, \end{aligned}$$

где $A_m = a_m^i E_{mi}$ $(a_m^i \in C^m(t))$ — ограниченные по норме матрицы, принадлежащие разрешимым $L_{N(m)}$, с базисами (E_{mi}) и структурными константами $C_{ij}^k(m)$, то его невырожденным решением будет

$$X = Q_M \int Q_M^{-1} Q_{M-1} \int Q_{M-1}^{-1} Q_{M-2} \cdots \int Q_1^{-1} F dt \ldots dt,$$

где Q_m могут иметь либо экспоненциальный вид

$$Q_m = \exp(b^i_m E_{mi}) \;:\; b^i_m \in C^1(t)$$

$$\dot{b}^i_m = -a^j_m \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (b^k_m C^j_{ki}(m))^n \right]^{-1}, \; b^i_m(0) = 0,$$

либо мультипликативно-экспоненциальный

$$Q_m = \prod_{i=1}^{N(m)} \exp(d_{mi} E_{mi}) \colon \; d_{mi} \in C^1(t),$$

$$\dot{d}_{mi} = -a^j_m \left[\prod_{k=1}^{i-1} \exp(d_{mk} C^j_{ki}(m)) \right]^{-1}, \; d_{mi}(0) = 0$$

с интегрируемыми в квадратурах дифференциальными системами.

Обобщает это утверждение

Теорема 6. Если в уравнении

$$X^{(K)} - A^q_{1K-1} W_q((A^q_{1p-1}),(X^{(p)} - A^1_{1p-1} X)) - A^1_{1K-1} X = 0 : q = \overline{2,K}, p = \overline{1,K-1} \quad (7)$$

матрицы $A^j_{i\alpha}$ $(i, j = \overline{1,K},\ \alpha = \overline{0,K-1})$ индуктивно определяются в виде

$$A^j_{i\alpha} \equiv \dot{A}^j_{i\alpha-1} + A^k_{i\alpha-1} A^j_k, A^j_{i0} \equiv A^j_i, \delta(A^q_{1p-1}) \neq 0,$$

а матрицы $A^j_i \in M^{(K-1)}_n(t)$ задаются как $A^j_i = W^*_j(T,(T^l_i B^k_l))$, где $T \equiv (T^j_i)$,

$\delta(T) \neq 0, \dot{T} = 0, B^j_i \in M^{(k-1)}_n(t), B^k_i = 0 : k < i, B^i_i \in L_{N(i)}, \left\| B^i_i \right\| < \infty$, то его решением будет

$$X = T_1{}^j Y_j \;:\; Y_j = Y_{jo} \int Y^{-1}_{jo} B^k_j Y_k dt \quad (k = \overline{j+1,K}) \colon\; \dot{Y}_{j0} = B^j_j Y_{j0}, \; \left| Y_{j0} \right| \neq 0 .$$

В пункте 4.5 проводится сравнительный анализ этих условий разрешимости, а в п.4.6 исследуется “полиприводимость” МЛОДУ.К, понятие которой вводит

Определение 2. Матричное линейное дифференциальное уравнение называется полиприводимым, или *К*-приводимым, если существует отображение в его решение решений *К* уравнений с постоянными коэффициентами.

На вопрос о линейной *К*-приводимости левосторонних МЛОДУ.К отвечает

Предложение 35. Уравнение (7) преобразованием $X = L^i Y_i$, где $L^i = L_1^i$, а L_i^j — подчинены условиям

1) $L_i^k \in M_n^{(1)}(t)$, 2) $\delta(L) \neq 0$, 3) $\dot{L}_i^j = (A_i^k + U_i^k)L_k^j : \dot{U}_i^j = A_i^k U_k^j - U_i^k A_k^j$,

приводится к K МЛОДУ.К с постоянными коэффициентами.

Глава II, состоящая из трех параграфов, посвящена МЛОДУ, в которых неизвестные матрицы и их производные умножаются на матричные параметры с обеих сторон. Метод исследования таких уравнений основан на редуцировании их тензорной валентности. В п.1.1 эту процедуру вводит

Определение 3. Вектор в R^{n^2} с компонентами $x_\alpha \equiv x_{n(i-1)+j} = X_i^j$ называется редуцированной матрицей $X = (X_i^j)\,(i, j = \overline{1,n})$

Действие редуцирования позволяет сводить двусторонние МЛОДУ к односторонним, так как справедлива следующая

Лемма. Двустороннее умножение матрицы X на квадратные матрицы $A = (A_i^j)$ и $B = (B_i^j)$, AXB, эквивалентно умножению редуцированной матрицы X слева на $(n^2 \times n^2)$ -мерную матрицу, блочными элементами которой являются $A_i^j B'$ (B' — транспонированная матрица B).

Пользоваться этим утверждением помогает

Определение 4. Левый блочно-матричный сомножитель редуцированной матрицы X при ее двустороннем умножении на матрицы A и B, $(R_\alpha^\beta) \equiv R(A,B) = A \otimes B'$ называется редуцентом матриц A и B.

С помощью леммы в п.1.2 доказывается

Теорема 7. Если в матричном уравнении

$$\dot{X} = \sum_{k=1}^{K} A_{k1} X A_{k2} + B \;:\; (A_{ks}, B) \subset M_n^{(0)}(t), \;\; \|A_{ks}\| < \infty, \;\; s = 1,2$$

$$A_{ks} = a^i_{ks} E_{si} \ : \ a^i_{ks} \in C^o(t), \quad \sum_{i=1}^{N(s)} (a^i_{ks})^2 < \infty,$$

где E_{si} — базисные матрицы представлений в R $N(s)$ -мерных алгебр Ли $L_{N(s)}$, структурные константы которых $C^k_{ij}(s)$ удовлетворяют условиям

$$C^k_{ij}(s) C^j_{ek}(s) C^i_{mp}(s) C^e_{qr}(s) = 0,$$

то это уравнение интегрируется в квадратурах.

В п.13 даются дополнительные условия (П5) разрешимости для уравнения $\dot{X} = AXA^{-1}$.

§2 посвящен системам двусторонних МЛОДУ.1. Начинается он (п.2.1) с формулирования следующих критериев их интегрируемости.

Предложение 6. Если в системе

$$\dot{X}_p = \sum_{q=1}^{Q} \sum_{k}^{K(p,q)} A_{k1pq} X_q A_{k2pq} + B_p \ : \ (A_{kspq}, B_p) \subset M^{(0)}_n(t), \quad p,q = \overline{1,Q} \qquad (8)$$

а) $A_{k1pq} A_{k2pq} = 0 \ : \ [(p<q) \vee (p>q)] \wedge (\forall k = \overline{1,K}(p,q))$

б) $A_{kspp} \in L_{N(s,p)} \ : \ s = 1,2$, где $N(s,p)$-мерные алгебры Ли — разрешимы,

в) $\|A_{kspp}\| < \infty$,

то она разрешима в квадратурах.

Предложение 7. Если в $M^{(0)}_{Qn^2}(t)$, содержащем $Qn^2 \times Qn^2$ - мерную матрицу

$$A = \left(\sum_{k=1}^{K(p,q)} R(A_{k1pq}, A_{k2pq}) \right)$$

найдется такая постоянная невырожденная матрица T, что $TAT^{-1} \in L_N$, где L_N ($N \le Q^2 n^4$)— представление в R^{Qn^2} разрешимой алгебры Ли, то система (8) интегрируется в квадратурах.

Предложение 8. Если в системе (8),

а) $A_{k1pq}A_{k2pq} = 0 : [(p < q) \vee (p > q)] \wedge (\forall k = \overline{1, K}(p,q))$,

б) $A_{k2pp} \in L_{N(p)}$, где $L_{N(p)}$ — разрешимые алгебры Ли,

в) $A_{k1pp} = K_{pp}$, а K_{pp} — постоянные матрицы с действительными характеристическими корнями, то система (8) интегрируется в квадратурах.

В п.2.2 метод решения систем двусторонних МЛОДУ.1 демонстрируется в двумерном случае, для которого (п.2.3) рассматривается пример в R^2.

§3 второй главы посвящен уравнениям высших порядков с двусторонним умножением. После анализа условий разрешимости факторизуемых уравнений второго и третьего порядков (П10 и 11) в п. 3.1 формулируется

Теорема 8. Если в матричном уравнении М-го порядка

$$\sum_{s=M}^{0} \sum_{k=1}^{K(s)} P_{Mks} X^{(s)} Q_{Mks} = F : (P_{Mks}, Q_{Mks}, F) \subset M_n^{(0)}(t), \quad P_{MMs} = Q_{MMs} = E$$

матричные параметры удовлетворяют условиям

$$\overset{*}{P}_{m,m} = E, \quad \overset{*}{P}_{m,m-1} = \overset{*}{A}_m + \overset{*}{P}_{m-1,m-2} : \quad m = \overline{1, M},$$

$$\overset{*}{P}_{m,j} = \dot{\overset{*}{P}}_{m-1,j} + \overset{*}{A}_m \overset{*}{P}_{m-1,j} + \overset{*}{P}_{m-1,j-1} : \quad j = \overline{1, m-2},$$

$$\overset{*}{P}_{m,0} = \dot{\overset{*}{P}}_{m-1,0} + \overset{*}{A}_m \overset{*}{P}_{m-1,0}, \quad \overset{*}{P}_{1,0} = \overset{*}{A}_1,$$

где $\overset{*}{P}_{m,s}, \overset{*}{A}_m$ и E — матрицы в R^{n^2}, определяемые в виде

$$\overset{*}{P}_{m,s} = \sum_{k=1}^{K(s)} R(P_{mks}, Q_{mks}), \quad \overset{*}{A}_m = \sum_{l=1}^{L(m)} R(A_{lm}, B_{lm}),$$

а матрицы A_{lm} и B_{lm} удовлетворяют условиям Т7 и принадлежат $M_n^{(M-m)}(t)$, то оно интегрируется в квадратурах.

В следующем пункте это утверждение поясняется примером однородного уравнения второго порядка в R^3, а в п.3.2 — дополняется методом определения разрешимых двусторонних МЛОДУ.2, эквивалентных системам МЛОДУ.1 (П12-14). Предложенный метод также иллюстрирован примером (п.3.4).

В третьей главе диссертации рассматриваются нелинейные уравнения. Глава содержит 3 параграфа, в первом из которых исследуются матричные квазилинейные уравнения (КУ).

Определение 5. Левым матричным квазилинейным уравнением первого порядка называется уравнение

$$\dot{X} = \sum_{k=1}^{K} X^{-n_k} A_k X^{n_k+1} : \ A_k \in M_n^{(0)}(t), \quad |X| \neq 0, \qquad X \in M_n^{(1)}(t), \quad (9)$$

где n_k — целые числа, правым КУ —

$$\dot{X} = \sum_{k=1}^{K} X^{1-n_k} A_k X^{n_k},$$

а общим КУ— уравнение вида

$$\dot{X} = \sum_{k=1}^{K} X^{-n_k} A_k X^{n_k+1} + \sum_{l=1}^{L} X^{1-m_l} B_l X^{m_l} : \quad B_l \in M_n^{(0)}(t).$$

Так как правые и общие КУ сводятся к левым (П 1,2), то в п.1.1 указываются основные свойства уравнения (9) (П3-5), а в п.1.2 и 1.3 даются следующие условия представимости его решения в экспоненциальном и мультипликативно-экспоненциальном видах.

Теорема 9. В области определения функций a_k^i уравнение (9) с $A_k = a_k^i E_i$ всегда имеет единственное решение вида (2), для чего необходимо и достаточно, чтобы функции x^j удовлетворяли системе

$$\dot{x}^i = [\sum_{k=1}^{K} \exp(n_k x^m C_{jm}^l) a_k^j][\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(p+1)!}(x^m C_{mi}^l)^p]^{-1} : \ x^i(o) = 0.$$

Теорема 10. В области определения функций a_k^i уравнение (9) с $A_k = a_k^i E_i$ всегда имеет единственное решение вида (4), для чего необходимо и достаточно, чтобы g_i удовлетворяла условию

$$\dot{g}_i = \sum_{k=1}^{K} a_k^j [\prod_{l=1}^{N} \exp(g_l C_{jl}^m)]^{n_k} = \prod_{l=i-1}^{1} \exp(g_l C_{il}^m) : \quad g_i(0) = 0.$$

Эти утверждения дополняются рядом "следствий" для различных структур L_N. В п.1.4 рассматривается уравнение $\dot{X} = A_1X + X^{-1}A_2X^2$ в базисе нильпотентной L_3 в R^3.

§2 посвящен еще одному виду нелинейных уравнений — дифференциально-автоморфных, под которыми подразумеваются уравнения вида

$$\dot{X} = \mathbf{exp}\, X A \mathbf{exp}(-X): \quad A \in M_n^{(0)}(t). \tag{10}$$

В п. 2.1 устанавливаются основные их свойства, в частности —

Теорема 11. В L_N, содержащей матрицу $A = a^i E_i$ всегда существует единственное решение уравнения (10), проекции которого на базисные матрицы E_i удовлетворяют условиям

$$\dot{x}^i = a^j \mathbf{exp}(x^k C_{kj}^i): \quad i, j, k = \overline{1, N}. \tag{11}$$

На вопрос об интегрируемости этой системы и уравнения (20) отвечает

Теорема 12. Для того, чтобы принадлежащее L_N решение уравнения (10) с $A \in L_N$ находилось в квадратурах для $\forall a^i$, необходимо и достаточно, чтобы L_N не содержала простой трехмерной подалгебры.

В соответствии с этим утверждением в п.2.2 дано решение системы (11) для всех разрешимых L_2 и L_3 (П8). 3 последующих пункта посвящены обобщениям уравнения (10): в п.2.3 рассматриваются уравнения

$$\dot{X} = \mathbf{exp}\, X \cdot A \mathbf{exp}(-X) + B$$

(П10 и 11), в п.2.4 —

$$\dot{X} = \sum_{k=1}^{K} \mathbf{exp}(X + C_k) A_k \mathbf{exp}(-X - C_k) + B: \quad (\dot{C}_k = 0, C_k \in M_n),$$

а, в п. 2.5 — системы дифференциально-автоморфных МОДУ.1, для которых доказана

Теорема 13. Если в системе

$$\dot{X}_p = \sum_{q=1}^{K} \exp X_q A_{pq} \exp(-X_q) + B_p : \quad (A_{pq}, B_p) \subset M_n^{(0)}(t), \quad p,q = \overline{1,K}, \quad (12)$$

матрицы Apq и B_p принадлежат алгебре Ли L_N, то в L_N существует единственное решение этой системы, для чего необходимо и достаточно, чтобы проекции X_p на E_i удовлетворяли совокупности K систем

$$\dot{x}_p{}^i = \sum_{q=1}^{K} a^j_{pq} \exp(x^l_q C^i_{lj}) + b^i_p \quad : \quad p,q = \overline{1,K}, i,j,l = \overline{1,N},$$

где a^j_{pq} и b^j_p — проекции на E_j матричных параметров системы.

Условие интегрируемости системы (12) дает

Следствие 3. Треугольная система (12) разрешима в квадратурах, если L_N является прямой суммой K разрешимых подалгебр $L_{N(p)}$

$$L_N = L_{N(1)} \oplus ... \oplus L_{N(K)} : \sum_{p=1}^{K} N(p) = N, A_{pp} \in L_{N(p)}, B_p \in L_{N(\bar{p})} : p \neq \bar{p} = \overline{1,K}.$$

§3 третьей главы посвящен нелинейным уравнениям высших порядков, оператор левой части которых факторизуется операторами трех видов, D_1(A), D_2(A) и D_3(A), действующими по правилам

$$D_1(A)X \equiv \dot{X} - AX, \quad D_2(A)X \equiv X - \dot{X}^{-1}AX^2, \quad D_3(A)X \equiv \dot{X} - e^X A e^{-X}$$

Основным утверждением этого параграфа является

Теорема 14. Матричное нелинейное уравнение K-го порядка

$$D_2(A_K) \prod_{p=l}^{K-1} D_3(A_p) \prod_{q=1}^{l-1} D_1(A_q) X = 0 : A_i \in M_n^{(o)}(t), \quad i = \overline{1,K}$$

интегрируется в квадратурах, если матрицы $A_p \in L_{N(p)}$ $(p = \overline{l,K})$, а $A_q \in L_N$, где L_N — прямая сумма разрешимых алгебр Ли $L_{N(p)}$.

Этот результат конкретизируется в П15 и П16 на случай МОДУ.2.

В заключение этой главы отмечается возможность применения полученных в §4 гл.I условий интегрируемости МЛОДУ.2 для получения видов разрешимых в квадратурах уравнений Рикати [43,46,47].

Глава IV содержит 3 параграфа, в которых матричные ДУ используются для исследования скалярных уравнений. Первый из них посвящен линейным уравнениям второго порядка, §2 — третьего, а §3 — системам уравнений.

В п.1.1 результаты главы I позволяют установить следующие условия интегрируемости линейных уравнений второго порядка

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2 x = 0 : \quad a_i \in C^o(t), i = 1,2, \tag{13}$$

Предложение 1. Для того, чтобы ЛОДУ.2 (13) интегрировалось в квадратурах, достаточно, чтобы a_i в нем имели один из трех видов

а) $a_1 = -2f_1 - k_2 f_2 - \dot{f}_2 / f_2$, $a_2 = f_1^2 - k_2 f_1 f_2 - k_1 f_2^2 + f_1 \dot{f}_2 / f_2 - \dot{f}_1$.

б) $a_1 = 2k_3 f_1 / (k_3 - 1) + k_1 k_3 f_2 + \dot{f}_2 / f_2$,
$a_2 = (k_3+1) f_1^2 / (k_3 - 1) + k_1(k_3 - 1) f_1 f_2 - k_2 f_2^2 + f_1 \dot{f}_2 / f_2 - \dot{f}_1$.

в) $a_1 = -2f_1 - kf_2 + k^{-1} f_3 - \dot{f}_2 / f_2$, $a_2 = \dot{f}_1 - a_1 f_1 - f_1^2 - f_2 f_3$.

в которых $f_i \in C^1(t)$, а $\dot{k}_p = \dot{k} = 0$ $(p = \overline{1,3})$; при этом его решением будет $x = T_1^1 P + T_1^2 Q \int P Q^{-1} B_2^1 dt$: $P = \exp\int B_1^1 dt, Q = \exp\int B_2^2 dt, \dot{\mathrm{T}} \equiv (\mathrm{T}_i{}^j) = 0, |T| \neq 0$, где B_i^j , определяется соответственно как

а) $B_1^1 = f_1 + f_2 R(T_2^1(k_2 \pm q) + 2k_1 T_1^1)$: $R = (T_1^1(k_2 \pm q) - 2T_2^1)^{-1}$, $q = \sqrt{k_2^2 + 4k_1}$

$B_2^1 = 2f_2 R((T_1^1)^2 k_1 + T_1^1 T_1^2 T_2^1 k_2 - (T_2^1)^2)$

$B_2^2 = f_1 + f_2 R(2T_1^1 k_1 + (T_1^1 k_2 - T_2^1)(k_2 \pm q)$

б) $B_1^1 = lT_1^2[(1 + k_3)(rT_2^1 - 0{,}5k_1 T_1^1) f_1 + (0{,}5(1 - 3k_3) k_1 T_2^1 - k_2 T_1^1) f_2]$:

$r = (1 - k_3)^{-1}, l = |\mathrm{T}|^{-1}$

$B_2^1 = l[T_1^1(k_1 T_1^1 + 2T_2^1 r) f_1 + (T_1^1 T_2^1 k_1 k_3 + (T_1^1)^2 k_2 - (T_2^1)^2) f_2]$

$B_2^2 = lT_1^2[0{,}5k_1(k_3 + 1) T_1^1 - T_2^1) f_1 + ((k_2 + 0{,}5k_1^2(k_3 - 1)) T_1^1 + 0{,}5k_1(k_3 - 1)) f_2]$, в) $B_1^1 = f_1 - k^{-1} f_3$, $B_2^1 = (T_2^1 f_2 + k^{-1} T_1^1 f_3) / T_1^2$, $B_2^2 = f_1 + k f_2$.

В п.1.2 устанавливается эквивалентность ЛОДУ.2 (13) и уравнения Рикка-ти $\dot{y} = y^2 - a_1 y + a_2$ с точки зрения их интегрируемости в квадратурах (П2) и даются достаточные условия разрешимости последнего (П3), а в п.1.3 определяются уравнения второго порядка, порождаемые триангулируемыми системами ЛОДУ.1.

Во втором параграфе рассмотрены линейные уравнения третьего порядка, позволяющие наиболее эффективно продемонстрировать лиевоалгебраические методы исследования скалярных ЛОДУ. Для этого в п.2.1 определяются ЛОДУ.n в присоединенном матричном представлении (ПМП) алгебр Ли L_N ,то есть порождаемых системами

$$\dot{x}^i = a^j C^i_{kj} x^k \ : \quad a^j \in C^n(t), \quad : (i, j, k = \overline{1,n}) \ , \tag{14}$$

где C^k_{ij} – структурные константы L_N . Характеризовать эти уравнения позволяет

Определение 6. ЛОДУ.n имеет вырождение первого (второго) типа k-го порядка, $O^k(1)$ ($O^k(2)$), если k первых (последних) его коэффициентов равны нулю.

Определение 7. n ЛОДУ.n, эквивалентных системе (14) для C^i_{kj} данного классификационного типа L_n, называются однотипными.

ЛОДУ.n в присоединенном матричном представлении обладают следующими важными структурными свойствами.

Предложение 5. Если L_m — идеал L_n, то *n-m* из n однотипных ЛОДУ.n в ПМП L_n имеют 0^m (1).

Предложение 6. Если $L_n = L_m \oplus L_{n-m}$, то среди однотипных ЛОДУ.n в ПМП L_n имеется *m* ЛОДУ.*m* и *n-m* ЛОДУ.*(n-m)*.

Предложение 7. Если O_m — центр L_n, то среди однотипных ЛОДУ.n в ПМП L_n имеется *m* уравнений, вырождающихся в однородные ЛОДУ.1 и *n-m* ЛОДУ.*(n-m)*.

Предложение 8. Для того, чтобы ЛОДУ.n в ПМП L_n интегрировались в квадратурах при $\forall a^k \in C^n(t)$, необходима и достаточна разрешимость L_n.

ЛОДУ.3 в ПМП всех неабелевых разрешимых L_3 определяет (п.2.2)

Теорема 15. ЛОДУ.3 в ПМП разрешимых неабелевых L_3 выбором системы координат приводятся к одному из следующих видов

а) $(\dot{a}b - a\dot{b})\dddot{x} + (a\ddot{b} - \ddot{a}b)\ddot{x} + (\ddot{a}\dot{b} - \dot{a}\ddot{b})\dot{x} = 0$: $x = k^1 + k^2\int_o^t b\,dt - k^3\int_o^t a\,dt; \dot{k}^i = 0;$

б) $a\ddot{x} + (\dot{a} + ab)\dot{x} + (\dot{a}b - a\dot{b})x = 0$: $x = \exp\int_o^t b\,dt(k^1 - k^2\int_o^t a\exp(-\int_o^t b\,dt)dt);$

в) $A\dddot{x} - ((a+b)B - cC)\ddot{x} + (BD - (\dot{c} - 2c^2)C)\dot{x} + (c^3C + BE - AF)x = 0$:

$A = (a+b)\dot{c} - (\dot{a} + \dot{b})c + ac^2$, $B = \ddot{c} + bc\dot{c} + 3c^3$, $C = c^2(a+3b) + 2\dot{c}(a+2b) +$

$+c(\dot{a} + 2\dot{b}) + \ddot{a} + \ddot{b}$, $D = c(a+2b) + \dot{a} + \dot{b}$, $E = c^2(a+b) - A$, $F = \ddot{c} + 3c\dot{c}$,

$x = f[\int_o^t (c(k^2 - k^3\int_o^t bf^{-1}dt) - k^3(a+b)f^{-1})dt + k^1]$, $f = \exp\int_o^t c\,dt$, $c \neq (a+b)(\int a\,dt)^{-1}$;

г) $\ddot{x} - (\dot{c}/c + 2c)\dot{x} + c^2x = 0$: $x = \exp\int_o^t c\,dt(k^1\int_o^t c\,dt + k^2)$

д) $A\dddot{x} + (bB + cC)\ddot{x} - (B(\dot{b} + C(a+qb)) + C(\dot{c} + qc^2))\dot{x} + (c(3\dot{c} + qc^2)A + c^3C +$

$+bc^2B)x = 0$: $A = b\dot{c} + \dot{b}c - ac^2$, $B = c^3(1-q^2) - \ddot{c} - 3qc\dot{c}$, $|q| < 2, \dot{q} = 0,$

$C = \ddot{b} + c(\dot{a} + q\dot{b}) - (a+qb)(2\dot{c} + qc^2) - bc^2$, $c \neq -b(\int a\,dt)$,

$x = F[\cos R(k^1 + k^3p^{-1}\int_o^t (a\sin R + b(0{,}5q\sin R - p\cos R))dt + \sin R(k^2 -$

$-k^3p^{-1}\int_o^t (a\cos R + b(0{,}5q\cos R + p\sin R))dt]$: $p^2 = 0{,}25(4 - q^2)$,

$R = p\int_o^t c\,dt$, $F = \exp(0{,}5q\int_o^t c\,dt)$;

е) $\ddot{x} - (\dot{c}/c + qc)\dot{x} + c^2x = 0$: $x = F(k^1\cos R + k^2\sin R)$

ж) $A\dddot{x}-((a+qb)E+cQ)\ddot{x}-(ED-BQ)\dot{x}+[E(qCD+(a+qb)C)+c^3Q-$

$-A(\dot{c}-cB+qcC)]x=0\ :\ \ A=bc^2-c(\dot{a}+q\dot{b})+\dot{c}(a+qb)\,,\ B=\dot{c}+qc^2$,

где (а, в, с) $\subset$ C^2(t), k^i= const.

В п.2.3 все эти уравнения сведены к общему виду:

Теорема 16. Невырожденные ЛОДУ.3 в ПМП L_3 эквивалентны двупараметрическому уравнению

$$\dddot{x}\ +\ f\ddot{x}\ +\ (g^2(1-q^2)\ -(\dot{g}/g+qg)f\ -\ddot{g}/g\ -3q\dot{g})\dot{x}\ +(3g\dot{g}+\ g^2(\dot{f}\ +qg))x\ =\ 0$$

с $q^2\le 4$, а вырожденные — уравнениям

$$\ddot{x}+f\,\dot{x}+g^2x=0:\ g=F\,/\,g\!\int Fdt,\ \ F=\exp\int_t^o fdt,$$

и

$$\dddot{x}+f\,\ddot{x}+(\dot{f}\,/3+2f^2\,/9+(1-2q^2\,/9)g^2)\dot{x}=0:g=-3F\,/(g\!\int Fdt)\,,$$

$$F=\exp(-\frac{1}{3}\int_o^t fdt)$$

с тем же ограничением на q.

Два следующих пункта посвящены исследованию ЛОДУ.3 в ПМП некомпактной (п.2.4) и компактной (п.2.5) простых L_3. Для обеих алгебр установлено, что в общем случае невырожденные уравнения не разрешимы в квадратурах и эквивалентны двупараметрическим ЛОДУ.3 (П13 и 15), а обладающие $0^1(1)$ и $0^1(2)$ уравнения — разрешимы (П14 и 16). Последний факт позволил дать достаточные условия интегрируемости *невырожденных* ЛОДУ.3 в ПМП простых L_3 (следствия П14 и П16). В п.2.6 находится вид ЛОДУ.3, порождаемого треугольной системой ЛОДУ.1. С произволом в 5 функций его определяет

Теорема 17. Для интегрируемости в квадратурах уравнения

$$\sum_{k=0}^{3}\ a_k x^{(3-k)}=0\ :\ a_k\in C^0(t),$$

достаточно, чтобы

$$a_2=-[a_o[\ddot{p}+\dot{p}(2f+q)+p(\dot{f}+2\dot{q}+f(f+q)+q^2]+a_1(\dot{p}+p(f+q))]\,/\,p,$$

$a_3 = [a_o[q(\ddot{p} + \dot{p}(2f + q) + p(\dot{f} - \dot{q} + f(f + q))) - p\ddot{f}] + a_1(\dot{p}q + p(fq - \dot{q}))]/p,$
где $(f,p,q) \subset C^2(t)$; при этом вне точек t_s, в которых $p(t_s)a_0(t_s) = 0$
(s — нумерующий точки индекс) общим решением этого уравнения будет

$$x = Q[C_3 + \int_0^t pFQ^{-1}(C_2 - C_1\int_0^t Q^{-1}F^{-2}p^{-2}\exp(\int_t^0 a_1/a_0 dt)dt)dt] :$$

$$Q = \exp\int_0^t q dt, \quad F = \exp\int_0^t f dt .$$

В п.2.7 и п.2.8 с помощью результатов пунктов 1.6 и 1.7 первой главы исследовались эндоморфные преобразования множества решений ЛОДУ.n и полиприводимость этих уравнений.

§3 главы IV посвящен системам скалярных уравнений. В п.3.1 рассматривались системы однородных ЛОДУ. Полученные в первых главах диссертации результаты позволили здесь сформулировать ряд дополнительных условий разрешимости систем ЛОДУ.1 (П19-21). Теорема 5 дала возможность определить критерий интегрируемости систем линейных уравнений высших порядков:

Предложение 22. Если в системе

$$x_i^M + P_{M,M-1i}{}^j x_j{}^{(M-1)} + P_{M,M-2i}{}^j x_j{}^{(M-2)} + \ldots + P_{M,oi}{}^j x_j = 0 : \; i,j = \overline{1,n}$$

матрицы $P_{m,k} \equiv (P_{m,ki}{}^j)$ удовлетворяют условиям T5, то ее решением будет *column X*, где X — матрица, определенная в T.5.

Это утверждение иллюстрируется системой двух ЛОДУ.2. В следующем пункте находится кривая Монжа квазилинейного уравнения в частных производных, а в п. 3.3 решается с помощью результатов §1 гл. III нелинейная система четырех ОДУ.1.

В “Заключении “ отмечаются главные результаты работы соответствующие поставленным в ней целям и задачам, и кратко характеризуются перспективы развития и использования теории матричных дифференциальных уравнений.

Основной диссертационный материал изложен в следующих публикациях:

1. Квадрируемые типы двумерных систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами //Сб.научных трудов "Некоторые вопросы качественной теории дифференциальных уравнений и теории управления движением" — Саранск: изд. Морд.ун-та, 1980 - С.117-120.

2. Один тип диффеоморфизмов матричного линейного дифференциального уравнения, определенного в базисе простой некомпактной трехмерной алгебры Ли //Сб.научных трудов "Дифференциальные уравнения" — Рязань: изд. РГПИ, 1981 - С.36-40.

3. Экспоненциальное решение матричных линейных дифференциальных уравнений первого порядка//Изв.вузов. Мат. -1981 - N7- С.31-33.

4. Диффеоморфизмы множества фундаментальных систем решений систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка //Дис... канд.физ.-мат. наук — Казань, 1981 - 96 с.; Автореф. дис. канд.физ.-мат. наук - Куйбышев, 1981 - 12 с.

5. Приводимость систем и диффеоморфные преобразования //СМЖ - 1983 - т.XXIV, N4 - С.220; ВИНИТИ - 1983 - N5004 - 82 Деп.

6. Экспоненциальное и мультипликативно-экспоненциальное решения матричного линейного однородного дифференциального уравнения общего вида //Сб.научн.трудов "Дифференциальные и интегральные уравнения" — Горький: изд.ГГУ, 1984 - С.56-60.

7. Кривая Монжа одного квазилинейного уравнения в частных производных в двумерном пространстве //Сб.научн.трудов "Дифференциальные и интегральные уравнения" — Горький: изд.ГГУ, 1985 - С.61-64.

8. Интегрируемость уравнения Риккати и линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка //Изв.вузов. Мат.- 1987 - N5 - С.33-40.

9. Квазилинейные матричные дифференциальные уравнения //Изв. вузов. Мат.- 1988 - №12 - С.11-17.

10. Интегрируемость в квадратурах линейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка //Изв.вузов. Мат.- 1989 - N8 - С.28-31.

11. Квазилинейные матричные дифференциальные уравнения //ДАН УССР. Сер.А - 1989 - N3 - С.11-13.

12. Матричные линейные дифференциальные уравнения в базисе алгебры Ли //Тез.докл. IV международн.конференц.по дифференц. уравнениям - Русе (НРБ), 1989 - С.89.

13. Лиевоалгебраический метод интегрирования некоторых видов нелинейных дифференциальных систем //Сб.научн.трудов "Дифференциальные и интегральные уравнения" — Горький: изд.ГГУ, 1989 - С.48-54.

14. Автоморфизмы объединения множества линейно-независимых решений дифференциальных уравнений второго порядка и касательного к нему множества //Сб.научн.трудов "Методы сравнения и методы Ляпунова" — Саранск: изд.Морд.ун-та, 1990 - С.85-88.

15. Разрешимость в квадратурах линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка в присоединенном представлении алгебр Ли //Диф.уравн.- 1991 - т.27, N4 - С.699-702.

16. Разрешимость в квадратурах матричных дифференциальных уравнений второго порядка //Диф.уравн.- 1991 - т.27, N5 - С.901-904.

17. The linear ordinary differential equations in adjoint representation of 3-rd dimential algebras of Lie //Abstracts of "Colloquium on differential equations and applications" — Budapest (Hungary), 1981 - P.8.

18. Разрешимость в квадратурах матричных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка //Summaries of "5th International conference on complex analysis and applications with symposium on generalized functions" — Varna (НРБ), 1991 - P.49.

19.Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения третьего порядка в присоединенном представлении простых алгебр Ли //Диф.уравн. -1992 - т.28, N10 - С.1675-1683.

20. Матричные линейные дифференциальные уравнения высших порядков //Диф.уравн.- 1993 - т.29, N4 - С.711-714.

21. Матричные линейные дифференциальные уравнения с двусторонним умножением //Труды XI Российск.коллокв. "Современный групповой анализ и задачи математического моделирования" — Самара: изд. Сам.ГУ, 1983 - С.56-61.

22. The solution of the systems of matrix LODE 1-st order //Abstracts of "Fourth Colloquium on the qualitative theory of differential equations" — Seged (Hungary), 1993 - P.14.

23. Матричные двусторонние линейные дифференциальные уравнения //Мат.заметки - 1994 - т.55, вып.1 - С.35-42.

24. Интегрирование матричных линейных дифференциальных систем первого порядка //Мат.моделирование - 1995 - т.7, N5 - С.52.

25. Интегрирование матричных линейных дифференциальных систем первого порядка //Материалы международн.конф. "Дифференциальные уравнения и их приложения" — Саранск: изд.Морд.ун-та, 1995 - С.173-178.

26. Факторизация разрешимых в квадратурах матричных ЛОДУ //Там же - С.179-183.

27. Матричные линейные дифференциальные уравнения второго порядка //Диф.уравн.- 1995 - т.31, N11 - С.1926-1927.

28. Два типа разрешимости матричных линейных дифференциальных уравнений //Изв.вузов. Мат.- 1996 - N1(404) - С.36-43.

29. Общий тип линейных дифференциальных уравнений третьего порядка в присоединенном представлении разрешимых алгебр Ли //Изв.вузов. Мат.- 1996 - N3(406) - С.29-37.

34. Диффеоморфизмы и приводимость матричных ЛОДУ.1//Тез. докл. конф. "Понтрягинские чтения — VIII" — Воронеж: изд.ВГУ, 1997 - С.44.

35. Матричные односторонние дифференциальные уравнения третьего порядка //Труды 7-й межвузовской конф. "Математическое моделирование и краевые задачи", ч. 3 — Самара: изд.СГТУ, 1997 - С.24-27.

36. Матричные разносторонние линейные дифференциальные системы первого порядка//Тез.докл. VII четаевской конф. "Аналитическая механика, устойчивость и управление движением" — Казань: изд.КГТУ, 1997 - С.116.

37. Интегрируемость матричных односторонних ЛОДУ высших порядков //Материалы конф. "Алгебра и анализ" — Казань: изд.Казанск.мат. общества, 1997 - С.69-70.

38. Интегрируемость систем матричных ЛОДУ первого порядка // Диф. уравн. - 1997 - т.33, № 11 — С. 1573.

39. Линейные системы над ассоциативной алгеброй // Тез.докл. Международ. конф., посвящ. 90-летию со дня рождения Л.С.Понтрягина. Диф.уравнения-М.: изд МГУ, 1998 - С.140-141.

40. Решение систем матричных алгебраических линейных уравнений // Изв.вузов. Мат.- 1998 - N10(437) - С.32-36.

41. Системы линейных ОДУ высших порядков //Труды средневолжского мат. общества.- Саранск: изд. Средневолжского мат. общества. 1998.-Т.1, №1.- С.97-99.

42. Об условии А.И.Лаппо-Данилевского// Диф.уравнения.-1998.- Т.34, №11.- С.1579-1580.

43. Матричные уравнения Риккати в базисе алгебр Ли // Тез. докл. Международ. конф. “Инвариантные методы исследования на многообразиях структур геометрии, анализа и математической физики”.-М.: изд.МГУ, 1998.- С.17-18.

44. Системы матричных линейных дифференциальных уравнений первого порядка // Мат. заметки.-1999.-Т.66, вып.1.-С.63-75.

45. Связь решений однородных и неоднородных односторонних ЛОДУ над ассоциативной алгеброй // Тез. докл. ВЗМШ-2000 “Современный анализ и его приложения”. - Воронеж: изд. ВГУ,2000.- С. 68-69.

46. Матричные дифференциальные уравнения Риккати над R^2// Труды 10-й Межвузовской конф.”Математическое моделирование и краевые задачи”, ч.3- Самара: изд.СГТУ, 2000.- С.47-50.

47. Приводимость, нормализуемость и разрешимость уравнения Риккати над ассоциативной алгеброй // Труды средневолжского мат. общества.- Саранск: изд. Средневолжского мат. общества. 2000.-Т.2, №1.- С.83-84.

48. Один тип матричных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка // Ред.журнала “Диф. уравн.” Минск.-2000.16с. Деп. в ВИНИТИ 09.10.200.№2570-ВОО.

Корректура автора

Подписано в печать 25.12.2000г
Заказ 588
Тираж 130 экз.

Печать RISO
Бумага тип. N1

Формат 60 84/16
Усл.- печ.л. 2,0
Учетн.- изд.л. 2,0

Печатно-множительный отдел КазГАСА.
Лицензия N 03/380 от 16.10.95г.
420043, Казань, Зеленая,1.

2-00